

1ª LISTA DE MECÂNICA QUÂNTICA I - PG
(2014-1)

1. Seja $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ uma base para o espaço de estados de polarização de um fóton, onde $|H\rangle$ ($|V\rangle$) representa um estado de polarização linear orientada na direção horizontal (vertical). Podemos definir os estados de polarização linear rodados de um ângulo θ como

$$\begin{aligned} |\theta\rangle &= \cos\theta |H\rangle + \sin\theta |V\rangle, \\ |\theta + \pi/2\rangle &= -\sin\theta |H\rangle + \cos\theta |V\rangle, \end{aligned}$$

e os estados de polarização circular à esquerda e à direita como

$$\begin{aligned} |E\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle), \\ |D\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle). \end{aligned}$$

Nesta linguagem quântica, um polarizador orientado segundo um ângulo θ com a horizontal é descrito pelo operador de projeção $|\theta\rangle\langle\theta|$.

- (a) Determine a probabilidade de um fóton circularmente polarizado à direita ser transmitido por um polarizador orientado a 30° .
 - (b) Determine o estado dos fótons transmitidos.
 - (c) Após a transmissão no primeiro polarizador, determine a probabilidade de transmissão em um segundo polarizador orientado a 60° e o estado final dos fótons transmitidos pelos dois polarizadores.
2. Seja $\mathbf{S}$ o operador momento angular de uma partícula e U um operador unitário.

- (a) Mostre que as componentes do operador $\mathbf{S}' = U \mathbf{S} U^\dagger$ também satisfazem a relação de comutação

$$[S'_i, S'_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} S'_k$$

- (b) Encontre os autovetores e autovalores de S'_z .

3. Dados dois operadores A e B , mostre as seguintes relações :

- (a) $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle = \frac{1}{4} |\langle[A, B]\rangle|^2$
- (b) $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] \dots$
- (c) $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}$ quando $[A, B] \propto \mathbb{1}$.

4. Seja $\hat{n} = \sin\theta \cos\phi \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta \sin\phi \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}}$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^3$.

- (a) Determine os autovalores de $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.
- (b) Determine os autovetores de $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de autovetores de S_z .

5. Verifique que as matrizes de Pauli satisfazem $\sigma_j^2 = \mathbb{1}$ ($j = x, y, z$) e mostre que

$$e^{i\gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cos\gamma \mathbb{1} + i \sin\gamma (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}).$$

6. Seja $T(x) \equiv e^{ixP/\hbar}$ o operador de translação em 1 dimensão, onde P é o operador momento linear e x é um parâmetro real.

- (a) Mostre que $T^{-1}(x) = T^\dagger(x) = T(-x)$.
- (b) Mostre que $T(a) X T^\dagger(a) = X + a$ e que $T(a) F(X) T^\dagger(a) = F(X + a)$ onde X é o operador posição e F uma função analítica.
- (c) Mostre que $\langle x | T(a) | \psi \rangle = \psi(x + a)$, onde $\psi(x) \equiv \langle x | \psi \rangle$.